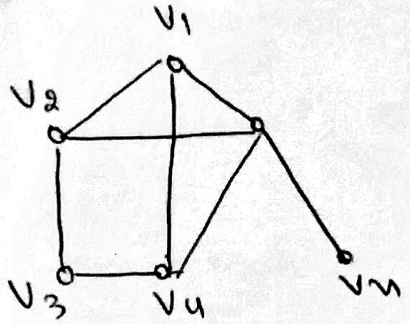
Βάσεις Gröbner

Χρωματισμός Γραφημάτων

$G(V,E)$, V: κορυφές και E: ακμές

$V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$E=\{ v_i v_j \} \dots \}$



Ερώτηση: Χρωματίζεται το γράφημα G με s-χρώματα;

Θα αντιστοιχίσω ένα ιδεώδες

$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \to$ το πλήθος των μεταβλητών είναι το πλήθος των κορυφών.

Έχουμε $I = \langle \underbrace{x_i^s - 1}_{\text{οι } s \text{ ρίζες της μονάδας}} \mid i \in \{1, \dots, n\} \rangle + \langle x_i^{s-1} + x_i^{s-2}x_j + x_i^{s-3}x_j^2 + \dots x_j^{s-1} \mid \{v_i, v_j\} \in E \rangle$.

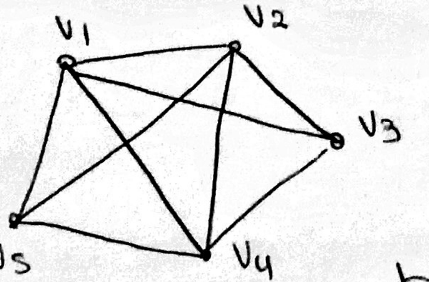
Στο $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ έχουμε μια μονωνυμική διάταξη $>$

G - ανηγμένη βάση Gröbner

1η περίπτωση: $G=\{1\}$. Το γράφημα δεν χρωματίζεται με s-χρώματα.

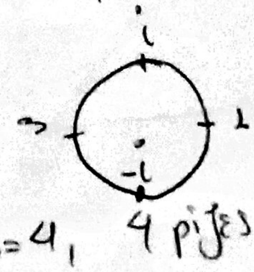
2η περίπτωση: $G\neq\{1\}$. Το γράφημα χρωματίζεται με s-χρώματα.

Θέμα:



Το γράφημα G χρωματίζεται με 4 χρώματα;

Θα δουλέψω στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$



Έχω 9 ακμές άρα 9 πολυώνυμα.

Θέλω να ελέγξω για 4 χρώματα άρα $s=4$, 4 ρίζες της μονάδας. →

θέλω η κάθε κορυφή να πάρει μια από τις 4 μονάδες και μετά
για κάθε ακμή θα βάλω ένα πολυώνυμο:

$I = \langle x_1^4-1,\ x_2^4-1,\ x_3^4-1,\ x_4^4-1,\ x_5^4-1,\ x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^3,\ x_2^3+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^3,$
$x_1^3+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_3^3,\ x_1^3+x_1^2x_4+x_1x_4^2+x_4^3,\ x_2^3+x_2^2x_4+x_2x_4^2+x_4^3,\ x_3^3+x_3^2x_4+x_3x_4^2+x_4^3,$

(και με ενδιαφέρουν τα μηδενικά αυτού του ιδεώδους.)

$x_2^3+x_2^2x_5+x_2x_5^2+x_5^3,\ x_1^3+x_1^2x_5+x_1x_5^2+x_5^3,$
$x_4^3+x_4^2x_5+x_4x_5^2+x_5^3 \rangle.$

βαθμού 3 ομογενείς

$\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] = \mathbb{C}^5$ → γιατί έχω 5 μεταβλητές

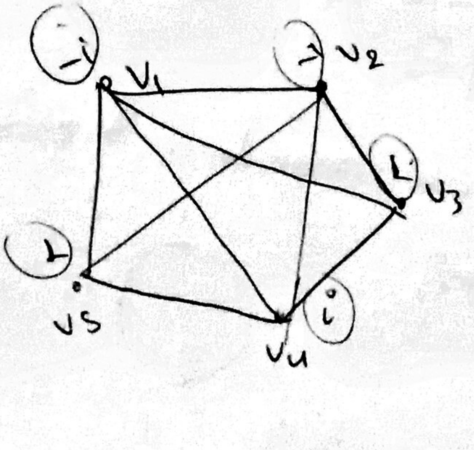
έχω $9+5=14$ πολυώνυμα.
→ τα 5-πολυώνυμα.

Η ανηγμένη βάση Gröbner: με degrevlex $x_1>x_2>x_3>x_4>x_5$

$G=\{x_1+x_2+x_4+x_5,\ x_2^2+x_2x_4+x_4^2+x_2x_5+x_5^2,$
$x_4^3+x_4^2x_5+x_4x_5^2+x_5^3,\ x_5^4-1\}$

Χρωματίζεται με 4 χρώματα;

Ναι αφού $G\neq\{1\}$ έχει τουλάχιστον ένα πολυώνυμο $\neq 1$ μέσα της
→ έχω σίγουρα διαφορετικά χρώματα



Είναι στον πολυωνυμικό δακτύλιο με 4 μεταβλητές:

$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ με degrevlex $x_1 > x_3 > x_2 > x_4$

Έχουμε τους γεννήτορες:

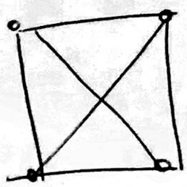
$$I = \langle x_1^3-1,\ x_2^3-1,\ x_3^3-1,\ x_4^3-1,\ x_1^2+x_1x_2+x_2^2,\ x_1^2+x_1x_3+x_3^2,$$
$$x_1^2+x_1x_4+x_4^2,\ x_2^2+x_2x_3+x_3^2,\ x_2^2+x_2x_4+x_4^2,$$
$$x_3^2+x_3x_4+x_4^2 \rangle$$ έχει 10 γεννήτορες

Βρείτε την ανάγωγη βάση Gröbner του I και βρείτε τη διάσταση του μιγαδικού διανυσματικού χώρου

$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]/I$

Για να βρούμε τη βάση Gröbner μπορούμε να κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία με πριν, να δω σε τι διάγραμμα αντιστοιχεί

έχω 6 ακμές:



δεν μπορεί να χρωματιστεί με 3 χρώματα γιατί έχω το πλήρες γράφημα. Άρα δεν χρωματίζεται με 3 χρώματα

Επομένως $G=\{1\}$ και $I=\langle 1\rangle = \mathbb{C}[x_1..x_n]$ παράγεται από τη βάση του

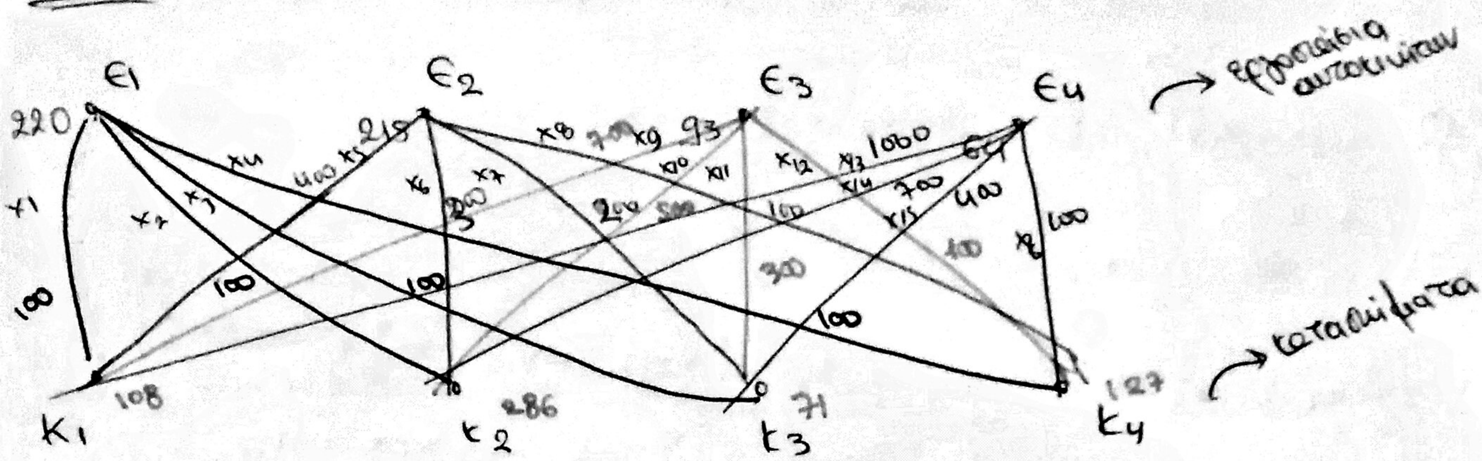
Άρα η διάσταση: ο δχ $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]/I$ έχει 1 διάνυσμα άρα ο μηδενικός δχ είναι

Η βάση είναι όλα τα μονώνυμα που δεν ανήκουν στο ιδεώδες.

$\dim \mathbb{C}[x_1,...,x_4]/I = 0$

Η βάση $\rightarrow$ κενό σύνολο $\rightarrow$ χώρος μηδενοδιάστατος.

Άσκηση



$$\left.\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4=220\\
&x_5+x_6+x_7+x_8=215\\
&x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}=93\\
&x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}=64.\\
&x_1+x_5+x_9+x_{13}=108\\
&x_2+x_6+x_{10}+x_{14}=286\\
&x_3+x_7+x_{11}+x_{15}=127
\end{aligned}\right\}$$

Αν υπολογίσω όλες οι λύσεις είναι

1.225.914.276.768.514

που πρακτικά αδύνατο.

Με υπολογισμό βάσεις Gröbner και μια διαίρεση στο τέλος θα βρω το ελάχιστο κόστος.

Με ενδιαφέρουν λύσεις $(x_1,\dots,x_{16})\in\mathbb{N}$

Με ενδιαφέρει και το κόστος:

$$C(x_1,\dots,x_{16}) = 100x_1+100x_2+100x_3+100x_4+400x_5+300x_6+200x_7+100x_8+700x_9+500x_{10}+300x_{11}+100x_{12}+1000x_{13}+700x_{14}+400x_{15}+100x_{16}.$$

συνάρτηση κόστους που θέλω να ελαχιστοποιήσω.

Τα προβλήματα του ακέραιου προγραμματισμού έχουν την παρακάτω μορφή: θέλαμε να βρούμε τη λύση $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{N}^n$

→ →

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1i}\lambda_i + \dots + a_{1n}\lambda_n &= b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{2i}\lambda_i + \dots + a_{2n}\lambda_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \dots + a_{mi}\lambda_i + \dots + a_{mn}\lambda_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

που ελαχιστοποιούν μια συνάρτηση κόστους.

$$C(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \dots + c_n\lambda_n$$

Έχουμε: $A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ με $A \in \mathbb{N}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{N}^{m \times 1}$, $c_i \geq 0$

n μεταβλητές όσοι και οι άγνωστοι και m μεταβλητές όσες οι γραμμές.

Θα δουλέψω στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, \dots, t_m]$

Θα βάλω σε αυτόν τον δακτύλιο μια μονωνυμική διάταξη $>_c$ που εξαρτάται από το κόστος.

$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ και ορίζουμε μια διάταξη $>_c$ ($>$ τυχαία μονωνυμική διάταξη)

$X^u >_c X^v \overset{(ορ)}{\iff} \underbrace{u \cdot c > v \cdot c}$ ή ($u \cdot c = v \cdot c$ και $X^u > X^v$),

$\to u_1c_1 + u_2c_2 + \dots + u_nc_n > v_1c_1 + \dots + v_nc_n$

με $v = (v_1, \dots, v_n)$
$u = (u_1, \dots, u_n)$
$c = (c_1, \dots, c_n)$

Άρα αυτή είναι μια μονωνυμική διάταξη και θα με βοηθήσει στο κόστος.

$$\left(\begin{aligned} &\text{Έχω: } \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_m] \\ &\mathbb{N}^{m \times n} \ni Ax = b \in \mathbb{N}^{m \times 1} \\ &c \text{ συνάρτηση κόστους} \end{aligned}\right) \longrightarrow$$

Το ιδεώδες που με ενδιαφέρει θα έχει ένα πολυώνυμο θεωρία του πίνακα Ax :

$J = \langle x_i - t^{\vec{a}_i} \mid 1 \le i \le n \rangle$

$t^{\vec{a}_i} = t_1^{a_{1i}} + t_2^{a_{2i}} + \dots t_m^{a_{mi}}$

<u>Πρόταση</u>: Στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{R}[x_1, \dots x_n, t_1, \dots, t_m]$. Το σύνολο $G_J = \{x_i - t^{a_i} \mid 1 \le i \le n\}$ είναι βάση Gröbner του J ως προς την λεξικογραφική διάταξη με

$x_1 > \dots > x_n > t_1 > \dots > t_m$.

Αν όλα τα S-πολυώνυμα πηγαίνουν στο 0 τότε είναι βάση Gröbner.

Συνήθως στα S-πολυώνυμα κοιτάζω ΕΚΠ όμως εδώ θα δω ΜΚΔ :

$S(x_i - t^{\vec{a}_i}, x_j - t^{\vec{a}_j}) \xrightarrow{G} 0$

$MK\Delta(x_i, x_j) = 1$ με $i \ne j$ άρα είναι βάση Gröbner.

<u>Λήμμα</u>: Ένα διώνυμο της μορφής $x^u - t^b \in J$ αν το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση στο $\mathbb{N}^{1\times n}$

Αν μπορέσω να βρω στο ιδεώδες έστω και ένα πολυώνυμο $x^u - t^b$ αυτής της μορφής τότε το σύστημα έχει λύση. Και αν το σύστημα έχει λύση $\exists$ τουλ. ένα αυτής της μορφής στο ιδεώδες

<u>Απόδειξη</u>: $(\Leftarrow)$ Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση την $x = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

θέλω να $x^u - t^b \in J$

όπου $x^u = x_1^{u_1} x_2^{u_2} \cdots x_n^{u_n}$.

Το σύστημα έχει λύση άρα αυτό σημαίνει ότι:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \cdots + a_{mn}u_n = b_m. \end{cases}$$

με κάποιο τρόπο πρέπει να πάω στον πολυωνυμικό δακτύλιο

$$\begin{cases} t_1^{a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n} = t_1^{b_1} \\ t_2^{a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_n} = t_2^{b_2} \\ \vdots \\ t_m^{a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \cdots + a_{mn}u_n} = t_m^{b_m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_1^{a_{11}u_1} \cdot t_1^{a_{12}u_2} \cdots t_1^{a_{1n}u_n} = t_1^{b_1} \\ t_2^{a_{21}u_1} \cdot t_2^{a_{22}u_2} \cdots t_2^{a_{2n}u_n} = t_2^{b_2} \\ \vdots \\ t_m^{a_{m1}u_1} \cdot t_m^{a_{m2}u_2} \cdots t_m^{a_{mn}u_n} = t_m^{b_m} \end{cases} \rightarrow$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(t^{\vec{a_1}})^{u_1} \cdot (t^{\vec{a_2}})^{u_2} \cdots (t^{\vec{a_n}})^{u_n} = t^b.$$

ανάγωγο γιατί δεν διαιρείται από κανένα x

Διαιρώ:

$$x_1^{u_1} x_2^{u_2} \cdots x_n^{u_n} \xrightarrow[x_1 - t^{\vec{a_1}}]{G_1} (t^{\vec{a_1}})^{u_1} (t^{\vec{a_2}})^{u_2} \cdots (t^{\vec{a_n}})^{u_n} = t^b.$$

Αυτό σημαίνει ότι $x^u \xrightarrow{G} t^b$, $x^u - t^b \in \langle G_1 \rangle = J$.

$\rightarrow \rightarrow$

$(\Rightarrow)$ $x^u - t^b \in J$

$$x^u - \left((t^{\bar{\alpha}_1})^{u_1}(t^{\bar{\alpha}_2})^{u_2}\cdots(t^{\bar{\alpha}_n})^{u_n}\right) \in J.$$

αφαιρούμε και τα δύο, ανήκει και η διαφορά τους. $\Longrightarrow$

$$\rightarrow \underbrace{(t^{\bar{\alpha}_1})^{u_1}(t^{\bar{\alpha}_2})^{u_2}\cdots(t^{\bar{\alpha}_n})^{u_n} - t^b}_{} \in J.$$

Αυτό το πολυώνυμο είναι το μειωμένο γιατί όλα είναι ανάγωγα

Αυτό το στοιχείο ή είναι 0 ή $\neq 0$ άρα ο αρχικός όρος του x_i να διαιρεί τον αρχικό όρο άρα

$$(t^{\bar{\alpha}_1})^{u_1} \cdots (t^{\bar{\alpha}_n})^{u_n} - t^b \neq 0 \ : \exists x_i / \mathrm{lt}(B) \text{ άτοπο!}$$

Άρα $(t^{\bar{\alpha}_1})^{u_1} \cdots (t^{\bar{\alpha}_n})^{u_n} - t^b = 0 \Rightarrow$

$$\rightarrow (t^{\bar{\alpha}_1})^{u_1} \cdots (t^{\bar{\alpha}_n})^{u_n} = t^b.$$

Άρα το ότι ανήκει το $x^u - t^b \in J$ μου λέει ότι το $Ax = b$ σύστημα έχει λύση!

$\longrightarrow$

Θα δούμε αλγόριθμο που μας λέει πότε έχει λύση το σύστημα και ποια είναι η βέλτιστη.

Conti - Traverso

$J = \langle x_i - t^{a_i} \rangle \subset K[x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_m]$

G ανάγωγη βάση Gröbner του J ως προς μια διάταξη απαλοιφής με τις t μεταβλητές μεγαλύτερες από τις x-μεταβλητές και διάταξη στις x μεταβλητές την $>_c$ (αυτή που ήρθε από το κόστος)

Αλγόριθμος

αυτή η βάση έχει διώνυμα και μαζί με μονώνυμα άρα θα πάρω μονώνυμο και μπορεί να έχει και t και x μεταβλητές.

$$t^b = t_1^{b_1} t_2^{b_2} \cdots t_s^{b_s} \xrightarrow{G} t^{\gamma} x^{u}$$ ανάγωγο μόδιο G (δεν μπορώ να συνεχίσω την διαίρεση)

$$S(y^u - y^v, y^a - y^b) = \frac{L}{y^u}(y^u - y^v) - \frac{L}{y^a}(y^a - y^b)$$

1η περίπτωση: Αν $\gamma \neq 0$ το πρόβλημα δεν έχει λύση

2η περίπτωση: Αν $\gamma = 0$ το $u = (u_1, \dots, u_n)$ είναι η βέλτιστη λύση

Απόδειξη της 1ης περίπτωσης:

$\gamma \neq 0$ και το πρόβλημα $Ax = b$ έχει λύση άρα.

$x^v - t^b \in J$ και $t^b - t^{\gamma} x^u \in J$ (γιατί έχω την διαίρεση)

Άρα και η διαφορά τους $\in J$: $\underbrace{x^v - t^{\gamma} x^u \in J}_{=B}$ ($\neq 0$ γιατί $t^{\gamma} \neq 0$)

Δηλαδή $\mathrm{lm}(B) = t^{\gamma} x^u$ (αναγκαστικά γιατί έχει t) αλλά αυτό είναι ανάγωγο μόδιο G, δηλαδή δεν διαιρείται κανένας όρος από το αρχικό μονώνυμο. Αυτό μου λέει ότι η βάση μου δεν είναι βάση Gröbner άτοπο. Άρα το πρόβλημα δεν έχει λύση. →

δεν διαιρείται από κανένα στοιχείο της G

Απόδειξη της $2^{ης}$ περίπτωσης:

- Έχουμε $\gamma = 0$ άρα $t^b \xrightarrow{G} x^u$. με x^u ανάγωγο μόδιο G.
  και $t^b - x^u \in J$. Άρα το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση
  την $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

- Έστω $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ μια άλλη λύση.

κάθε λύση που δίνει ένα διώνυμο μέσα στο ιδεώδες

$\left.\begin{array}{l} t^b - x^u \in J \\ t^b - x^v \in J \end{array}\right\} \Rightarrow x^v - x^u \in J$ άρα $x^v - x^u \neq 0$. και ένα από τα 2 μονώνυμα είναι πιο μεγάλο
Το x^u είναι ανάγωγο άρα δεν διαιρείται από κανένα αρχικό όρο δηλαδή $x^v > x^u$

Ποιά είναι η διάταξη x; $x^v \geq_c x^u \Rightarrow cv \geq cu$ ⊛

Η διάταξη κόστους, το κόστος της x^v είναι πιο μεγάλο από της x^u. Άρα η είναι η βέλτιστη λύση.

Η βέλτιστη λύση δεν είναι μοναδική, μπορώ να έχω πολλές βέλτιστες.
Ο αλγόριθμος αυτός δεν μου δίνει μοναδικότητα.
Μπορώ να βρώ ποιές έχουν ισότητα στην ⊛ από τις λύσεις
άρα να βρώ όλες τις βέλτιστες.

Γενικά αλλάζουν πολλά δεδομένα (στο $Ax = b$ συνήθως το b)

$$t_1^{220}\, t_2^{215}\, t_3^{93}\, t_4^{64}\, t_5^{108}\, t_6^{286}\, t_7^{71}\, t_8^{127} \xrightarrow{G} x_1^{108}\, x_2^{112}\, x_6^{174}\, x_7^{41}\, x_{11}^{30}\, x_{12}^{63}\, x_{16}^{64}$$